Analiza zespolona
Lista 3

Zad 1. Wykazać, że przy „funkcji liniowej“, to jest przy przekształceniu postaci $f(z) = az + b$, $a \neq 0$,

a) okrąg przechodzi na okrąg,

b) para prostych równoległych na parę prostych równoległych,

c) stosunek podziału $(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$ zachowuje się,

d) zachowują się kąty między krzywymi.

Zad 2. Znaleźć „funkcję liniową“ przekształcającą trójkąt o wierzchołkach 0, 1, i na trójkąt o wierzchołkach 0, 2, $1 + i$.

Zad 3. Przedstawić *homografię*, to jest odwzorowanie postaci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad-bc \neq 0$, w postaci superpozycji „funkcji liniowych“ i inwersji.

Zad 4. Wykazać, że homografie tworzą grupę przekształceń.

Zad 5. Wyznaczyć obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ przy odwzorowaniu homograficznym

$$f(z) = \frac{z-a}{z-\overline{a}}, \qquad \text{gdzie } \mathrm{Im}\, a > 0.$$

Zad 6. Dowieść, iż homografie przeprowadzają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

Zad 7. Znaleźć obraz zbioru $\{z : 0 < arg\, z < \frac{\pi}{2}\}$ przy odwzorowaniu homograficznym

$$f(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Zad 8. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną liczby $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Zad 9. Znaleźć sumy szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nt$, gdzie $r, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$.

Zad 10. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \cdot z^n$.

Zad 11. Wyznaczyć promień szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ wiedząc, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n$ rozbieżny.

Zad 12. Sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$.